הרצאה 9

התמרת לפלס

שיטת התמרת לפלס היא גם שיטה לפתרון משוואות ליניאריות אי-הומוגניות עם מקדמים קבועים.

שימוש שיטת התמרת לפלס נעוצה בתכונות אחדות, נוחות במיוחד:

1. שיטת התמרת לפלס הופחת משוואה דיפרנציאלית לבעיה אלגברית ולעבודה בעזרת טבלאות מוכנות מראש.
2. התמרת לפלס מטפלת באופן טבעי בבעיות תנאי התחלה.
3. התמרת לפלס מתפלת ביעילות גם משוואות בהן אגף ימין מכיל פונקציות בעלות אי-רציפות מסוג קפיצה.

הגדרה: תהי נתונה פונקציה $f(t)$ המוגדרת עבור $0 \le t \le \infty$. התמרת לפלס של $f(t)$, שתסומן מכן ואילך כ- $F(s)$ או $L[f(t)](s)$, היא הפונקציה $F(s) = L[f(t)](s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$

האינטגרל קוראים אינטגרל לפלס. התמרת לפלס היא אחת מהתמרות אינטגרליות רבות.

האינטגרל שבהגדרה הוא אינטגרל מוכלל בשל תחום אינטגרציה הבלתי חסום לכן יש להבינו כ-

$$\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T f(t)e^{-st}dt$$

כאשר גבול קיים. גבול זה לא קיים תמיד, לכן נמצא תנאים המבטיחים את קיומו.

כדי שהאינטגרל $\int_0^T f(t)e^{-st}dt$ יהיה קים לכל T סופי, נניח כי $f(t)$ רציפה למקוטעין, דהיינו כי בכל קטע סופי $[0,T]$ יש ל- $f(t)$ לכל היותר מספר סופי של נקודות אי-רציפות והן מסוג של קפיצה.

עבור פונקציה כזו אינטגרל רימן קיים.

כדי שהאינטגרל ישאף לגבול כאשר $t\to\infty$, יש להניח כי $f(t)$ אינו "גדול מדי" ליתר דיוק. נניח כי קיימים קבועים $M>0, c$ כך ש- $|f(t)| \le Me^{ct},\ 0 \le t < \infty$

משפט אם הפונקציה $f(t)$ רציפה למקוטעין ו- $|f(t)| \le Me^{ct}$ לכל $0 \le t < \infty$, אז התמרת לפלס $F(s) = L[f(t)](s)$ קיימת לכל $s > c$.

הגדרה פונקציה $f(t)$ שמתקיימת תנאים תנאים המשפט נקראת פונקציה-מקור

פונקציה $F(s) = L[f(t)](s)$ נקראת פונקציה-תמונה

הערה: גבול מפונקציה-תמונה כאשר $s \to \infty$ שווה ל-0, $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$

דוגמה 1). האם פונקציות: $f(t) = 3e^{t^2}$, $f(t) = \frac{1}{t-1}$ הן פונקציות-מקור,

2). האם פונקציה $F(s) = \frac{s^3 - s}{s^2 + 3s - 1}$ היא פונקציה-תמונה

פתרון: 1). פונקציה $f(t) = 3e^{t^2}$ היא לא פונקציה-מקור כי היא לא מתקיימת תנאי חסימות,

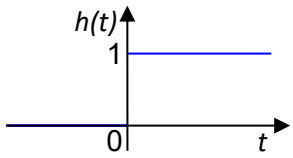
אי-אפשר למצוא קבועים חיובים M, c כך ש- $\left|3e^{t^2}\right| \le Me^{ct},\ t \to \infty$,

פונקציה $f(t) = \frac{1}{t-1}$ היא לא פונקציה-מקור כי יש לה בנקודה $t = 1$ נקודת אי-רציפות מסוג 2,

$$\left(\lim_{t\to 1} \frac{1}{t-1} = \infty\right)$$

2). פונקציה $F(s) = \frac{s^3 - s}{s^2 + 3s - 1}$ היא לא פונקציה-תמונה כי $\lim_{s\to\infty} \frac{s^3 - s}{s^2 + 3s - 1} = \infty \ne 0$

דוגמה מצה פונקציה-תמונה ל פונקציה Heaviside: $h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \ge 0 \end{cases} \equiv 1$



פתרון: $F(s) = \int_0^\infty e^{-st}dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st}dt = \lim_{T\to\infty} \left(-\frac{e^{-st}}{s} \Big|_0^T \right) = -\lim_{T\to\infty} \left(\frac{e^{-sT}}{s} - \frac{1}{s} \right) = \frac{1}{s}$

הערה: $\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T f(t)e^{-st}dt = \lim_{T\to\infty}\left(\varphi(t,s)\Big|_0^T\right) \Leftrightarrow \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \varphi(t,s)\Big|_0^\infty$

דוגמה מצה פונקציה-תמונה ל פונקציה $f(t)=e^{\alpha t}$

פתרון: $F(s)=\int_0^\infty e^{\alpha t}e^{-st}dt=\int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t}dt=-\frac{e^{-(s-\alpha)t}}{s-\alpha}\Big|_0^\infty=\frac{1}{s-\alpha}$

דוגמה מצה פונקציה-תמונה ל פונקציה $f(t)=\sin t$

פתרון: $F(s)=\int_0^\infty e^{-st}\sin t dt$

$$\int_0^\infty e^{-st}\sin t dt=\begin{bmatrix}\sin t=u & \cos t dt=du\\ e^{-st}dt=dv & v=-\frac{1}{s}e^{-st}\end{bmatrix}=\underbrace{-\frac{1}{s}e^{-st}\sin t\Big|_0^\infty}_{=0}+\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos t dt=$$

$$\begin{bmatrix}\cos t=u & -\sin t dt=du\\ e^{-st}dt=dv & v=-\frac{1}{s}e^{-st}\end{bmatrix}=\frac{1}{s}\left(\underbrace{-\frac{1}{s}e^{-st}\cos t\Big|_0^\infty}_{=\frac{1}{s}}-\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\sin t dt\right)=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2}\int_0^\infty e^{-st}\sin t dt$$

$$\int_0^\infty e^{-st}\sin t dt=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2}\int_0^\infty e^{-st}\sin t dt$$

$$\Leftarrow\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\int_0^\infty e^{-st}\sin t dt=\frac{1}{s^2}\Leftarrow\int_0^\infty e^{-st}\sin t dt+\frac{1}{s^2}\int_0^\infty e^{-st}\sin t dt=\frac{1}{s^2}$$

$$F(s)=\frac{1}{s^2+1}\Leftarrow\int_0^\infty e^{-st}\sin t dt=\frac{1}{s^2+1}\Leftarrow\frac{s^2+1}{s^2}\int_0^\infty e^{-st}\sin t dt=\frac{1}{s^2}$$

תכונות של התמרת לפלס

1. משפט הליניאריות

אם $L[f_1(t)](s)=F_1(s)$ קיים עבור $s>c_1$ ו- $L[f_2(t)](s)=F_2(s)$ עבור $s>c_2$ אז לכל צירוף ליניארי של פונקציות-מקור $k_1f_1(t)+k_2f_2(t)$ קיימת פונקציה-תמונה:

$L[k_1f_1(t)+k_2f_2(t)](s)=k_1F_1(s)+k_2F_2(s)$ עבור $s>\max\{c_1,c_2\}$

2. **משפט**

אם $L[f(t)](s)=F(s)$, אז $L[f(ct)](s)=\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right)$ לכל $c>0$

הוכחה: $L[f(ct)](s)=\int_0^\infty f(ct)e^{-st}dt=\begin{bmatrix} u=ct,\ t=\frac{u}{c} \\ dt=\frac{du}{c} \end{bmatrix}=\frac{1}{c}\int_0^\infty f(u)e^{-\frac{s}{c}u}d(u)=\frac{1}{c}F(\frac{s}{c})$

3. **משפט**

אם $L[f(t)](s)=F(s)$, אז $L\left[e^{bt}f(t)\right](s)=F(s-b)$

הוכחה: $L\left[e^{bt}f(t)\right](s)=\int_0^\infty e^{bt}f(t)e^{-st}dt=\int_0^\infty f(t)e^{-(s-b)t}dt=F(s-b)$

4. **משפט**

אם $L[f(t)](s)=F(s)$, אז עבור כל מספר $\tau>0$ מתקיים $L[f(t-\tau)](s)=e^{-s\tau}F(s)$

הוכחה:

$$L[f(t-\tau)](s)=\int_0^\infty f(t-\tau)e^{-st}dt=\int_0^\infty f(t-\tau)e^{-s(t-\tau+\tau)}d(t-\tau)=$$

$$=\int_0^\infty e^{-s\tau}f(t-\tau)e^{-s(t-\tau)}d(t-\tau)=e^{-s\tau}\int_0^\infty f(t-\tau)e^{-s(t-\tau)}d(t-\tau)=e^{-s\tau}F(s)$$

5. **משפט**

אם $L[f(t)](s)=F(s)$ אזי $L[t\cdot f(t)](s)=-\frac{d}{ds}F(s)$

הוכחה:

$$\frac{d}{ds}F(s)=F'(s)=\left(\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt\right)'_s=\int_0^\infty\left(f(t)e^{-st}\right)'_s dt=\int_0^\infty(-t)f(t)e^{-st}dt=-L[t\cdot f(t)](s)$$

$$\Leftarrow L[t\cdot f(t)](s)=-F'(s)$$

מסקנה $L\left[t^n \cdot f(t)\right](s) = (-1)^n F^{(n)}(s)$

דוגמה מצה פונקציה-תמונה ל פונקציה $f(t) = t^2 \sin t$

פתרון

$$L\left[t^2 \cdot f(t)\right](s) = (-1)^2 F''(s) = \left(\frac{1}{s^2+1}\right)'' = \left(-\frac{2s}{(s^2+1)^2}\right)' =$$

$$= \frac{-2(s^2+1)^2 + 2(s^2+1)4s^2}{(s^2+1)^4} = \frac{6s^2-2}{(s^2+1)^3}$$

.6 **משפט**

אם $L\left[f(t)\right](s) = F(s)$ והגבול $\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t}$ קיים, אז $L\left[\frac{f(t)}{t}\right](s) = \int_s^\infty F(z)dz$

הוכחה: לפי הגדרת התמרת לפלס $F(z) = \int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt$,

לכן $\int_s^\infty F(z)dz = \int_{z=s}^\infty \left(\int_{t=0}^\infty f(t)e^{-zt}dt\right)dz$ ולאחר החלפת סדר האינטגרציה $\int_{t=0}^\infty \left(\int_{z=s}^\infty e^{-zt}dz\right)f(t)dt$

האינטגרל הפנימי הוא $\int_{z=s}^\infty e^{-zt}dz = \left.\frac{e^{-zt}}{-t}\right|_{z=s}^\infty = 0 + \frac{e^{-st}}{t}$, לכן האינטגרל כפול

$$\int_{t=0}^\infty \left(\int_{z=s}^\infty e^{-zt}dz\right)f(t)dt = \int_{t=0}^\infty \frac{e^{-st}}{t}f(t)dt = L\left[\frac{f(t)}{t}\right](s)$$

דוגמה מצה פונקציה-תמונה ל פונקציה $f(t) = \frac{\sin t}{t}$

$\lim_{t\to 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1$, $L\left[\sin t\right](s) = \frac{1}{s^2+1}$, אז

$$L\left[\frac{\sin t}{t}\right](s) = \int_s^\infty \frac{1}{z^2+1}dz = \arctan z\Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctan s$$

7. משפט גזירת פונקציה-מקור

אם לפונקציה $f(t)$ רציפה המקיימת $|f(t)| \le Me^{ct}$ לכל $0 \le t < \infty$ ו- $f'(t)$ רציפה למקוטעין, אז קיימים $L[f'(t)](s)$, $L[f'(t)](s)$ לכל $s > c$ ו- $L[f'(t)](s) = sF(s) - f(0)$

הוכחה: $F(s) = L[f'(t)](s) = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt$, נקבל $\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt$ לפי אינטגרציה בחלקים

$$\int_0^T f'(t)e^{-st}dt = \begin{bmatrix} u = e^{-st} & du = -se^{-st} \\ dv = f'(t)dt & v = f(t) \end{bmatrix} = f(t)e^{-st}\Big|_0^T + s\int_0^T f(t)e^{-st}dt =$$

$$= e^{-sT}f(T) - f(0) + s\int_0^T f(t)e^{-st}dt$$

מכיון ש- $|f(t)| \le M_0 e^{ct}$, עבור קבוע מסוים c, הרי ש- $|f(t)e^{-sT}| < M_0 e^{(c-s)T} \to 0$ כאשר

$T \to \infty$ ו- $s > c$, ואנו מקבלים $\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = -f(0) + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \Leftarrow$

$$L[f'(t)](s) = sF(s) - f(0)$$

מסקנה אם נשתמש את המשפט עוד פעם נקבל:

$$L[f''(t)](s) = s\left(sF(s) - f(0)\right) - f'(0) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$,L[f'''(t)](s) = s\left(s^2F(s) - sf(0) - f'(0)\right) - f''(0) = s^3F(s) - sf(0) - sf'(0) - f''(0)$$

$$L\left[f^{(n)}(t)\right](s) = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0) \quad ,\ldots$$

8. משפט אינטגרציה של פונקציה-מקור

אם $L[f(t)](s) = F(s)$ אזי $L\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right](s) = \frac{F(s)}{s}$

הוכחה: נסמן $g(t)=\int_0^t f(t)dt$, אם $f(t)$ מסדר גודל מעריכי, כלומר $|f(\tau)|\le Me^{c\tau}$ אז גם $g(t)$

כזה כי $|g(t)|\le\int_0^t Me^{c\tau}d\tau=\frac{M}{c}\left(e^{ct}-1\right)<\frac{M}{c}e^{ct}$ לכן התמרות לפלס של $g(t)$ קיימת. בין

ההתמרות של $g(t)$ ו- $g'(t)=f(t)$ קים הקשר $L[g'(t)](s)=sL[g(t)](s)-g(0)$ ו $g(0)=0$.

לכן $L[g(t)](s)=\frac{1}{s}L[g'(t)]$, קבלנו

$$L\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right](s)=L[g(t)](s)=\frac{1}{s}L[g'(t)](s)=\frac{1}{s}L[f(t)](s)=\frac{F(s)}{s}$$

הגדרה: נתונות שתי פונקציות $f(t),\ g(t)$ רציפות למקוטעין על $[0,\infty]$. קונוולוציה שלהן היא

פונקציה $f*g$ המוגדרת ע"י $(f*g)(t)=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau,\ \ 0\le t<\infty$

דוגמה מצה e^t*t

פתרון: $e^t*t=\int_0^t e^{\tau}(t-\tau)d\tau=t(e^t-1)-(te^t-e^t+1)=e^t-t-1$

קונוולוציה מקיימת: $(f*g)(t)=(g*f)(t)$

משפט אם $L[f(t)](s)=F(s)$ ו $L[g(t)](s)=G(s)$ - אז $(L[(f*g)(t)](s)=F(s)\cdot G(s)$

דוגמה: מצה פונקציה-תמונה של e^t*t

פתרון: לפי משפט קונוולוציה מקבלים $L[e^t](s)=\frac{1}{s-1}$, $L[t](s)=\frac{1}{s^2}$

$$L[e^t*t](s)=\frac{1}{s-1}\frac{1}{s^2}=\frac{1}{s^2(s-1)}$$

אמת $e^t*t=e^t-t-1$ אז לפי משפט הליניאריות $L[e^t*t]=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}=\frac{1}{s^2(s-1)}$.

לאחר שהגדרנו מהי התמרת לפלס $L[f(t)](s)=F(s)$ של פונקציה $f(t)$, נגדיר גם את הפעולה ההפוכה. כדי שהתמרת לפלס ההפוכה של $F(s)$ תהיה מוגדרת נדרש שהתמרת לפלס ההפוכה היא פונקציה רציפה.

הגדרה $F(s)=L[f(t)](s)$ עבור $s>c$ ו- $f(t)$ פונקציה רציפה, נאמר כי $f(t)$ היא התמרת לפלס ההפוכה של $F(s)$ ונסמן אותה כ- $f(t)=L^{-1}[F(s)](t)$.

דוגמה: מצה פתרון פרטי של משוואה $y''-5y'+6y=8e^t$ לפי ת"ה $y(0)=3,\ y'(0)=-1$

מקבלים תמונה לשני אגפים של משוואה נתונה לפי טבלה של התמרת לפלס.

$$L[y''](s)-5L[y'](s)+6L[y]=8L[e^t](s)$$

$$\left(s^2L[y(t)](s)-sy(0)-y'(0)\right)-5\left(sL[y(t)](s)-y(0)\right)+6L[y(\mathrm{t})](s)=\frac{8}{s-1}$$

נסמן $L[y(\mathrm{t})](s)=Y(s)$ אז $\left(s^2-5s+6\right)Y(s)+\left(5-s\right)y(0)-y'(0)=\frac{8}{s-1}$

בעזרת תנאי ההתחלה: $y(0)=3,\ y'(0)=-1$ נקבל $\left(s^2-5s+6\right)Y(s)+\left(5-s\right)3+1=\frac{8}{s-1}$

$$Y(s)=\frac{3s-16}{s^2-5s+6}+\frac{8}{(s-1)(s^2-5s+6)}$$

נפרק את הביטויים לשברים חלקיים ונקבל:

$$Y(s)=\frac{10}{s-2}-\frac{7}{s-3}+8\left(\frac{1/2}{s-1}-\frac{1}{s-2}+\frac{1/2}{s-3}\right)=\frac{2}{s-2}-\frac{3}{s-3}+\frac{4}{s-1}$$

בעזרת התמרה הפוכה מקבלים פתרון פרטי של משוואה נתונה: $y(t)=2e^{2t}-3e^{3t}+4e^t$

טבלת התמרת לפלס

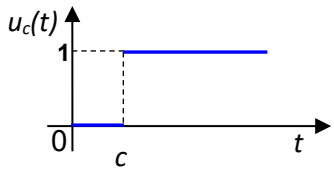
N	$f(t)=L^{-1}\left[F(s)\right](t)$	$F(s)=L\left[f(t)\right](s)$
1	$k_1 f_1(t)+k_2 f_2(t)$	$k_1F_1(s)+k_2F_2(s)$
2	$f(kt),\ k>0$	$\frac{1}{k}F\left(\frac{s}{k}\right)$
3	$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$
4	$t^n\cdot f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
5	$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
6	$u_c(t)$	$\frac{e^{-cs}}{s},\ s>0$
7	$u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$
8	$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
9	$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$
10	1	$\frac{1}{s},\ s>0$
11	e^{at}	$\frac{1}{s-a},\ s>a$
12	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}},\ s>0$
13	t^ne^{at}	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}},\ s>a$
14	$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2},\ s>0$
15	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2},\ s>0$
16	$e^{at}\sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$
17	$e^{at}\cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$

פונקציה מדריגה

התמרת לפלס שימושית מאד עבור משוואות דיפרנציאליות ליניאריות, לא הומוגניות שבאגף ימין פונקציה אינה רציפה ונקודות אי-רציפות שלה הן מסוג "קפיצה".

לעבוד עם פונקציות אלה אפשר ע"י פונקציה מדריגה (פונקציה Heaviside).

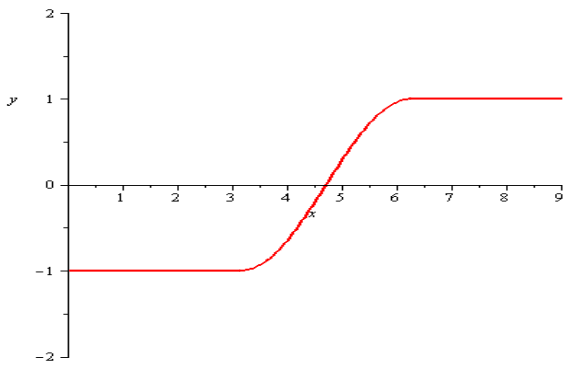
$$u_c(t)=\begin{cases}0, & 0\le t\le c\\ 1, & c\ge t\end{cases}$$



התמרת לפלס של פונקציה מדריגה: $L\left[u_c(t)\right](s)=\dfrac{e^{-cs}}{s},\quad s>0$

דוגמה:

נתונה פונקציה $f(t)=\begin{cases}-1, & 0\le t<\pi\\ \cos t, & \pi\le t<2\pi\\ 1, & t\ge 2\pi\end{cases}$. מצא התמרת לפלס לפונקציה $f(t)$



$f(t)=-1+u_\pi(t)+\left(\cos t\right)\cdot u_\pi(t)-\left(\cos t\right)\cdot u_{2\pi}(t)+u_{2\pi}(t)$ אבל לפי נוסחה 7 בטבלה צריך לקבל ב- $\cos t$ ביטוי $\cos(t-\pi)$ ו- $\cos(t-2\pi)$.

לפי זוויות טריגונומטריות $\cos t=-\cos(t-\pi)$, $\cos t=\cos(t-2\pi)$ מקבלים:

$$f(t)=-1+u_\pi(t)-u_\pi(t)\cdot\cos\left(t-\pi\right)-u_{2\pi}(t)\cdot\cos\left(t-2\pi\right)+u_{2\pi}(t)$$

תמונה לפונקציה $f(t)$ היא: $L[f(t)]=-\frac{1}{s}+\frac{e^{-\pi s}}{s}-e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+1}-e^{-2\pi s}\frac{s}{s^2+1}+\frac{e^{-2\pi s}}{s}$

דוגמה:

פתור $\begin{matrix} y''(t)+4y(t)=f(t) \\ y(0)=1,\ y'(0)=0 \end{matrix}$ כאשר $f(t)=\begin{cases} 0, & 0\le t<\pi \\ 1, & \pi\le t<2\pi \\ 0, & 2\pi\le t \end{cases}$

פתרון: $f(t)=u_\pi(t)-u_{2\pi}(t)$

$$\Leftarrow\ s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+4Y(s)=\frac{e^{-s\pi}}{s}-\frac{e^{-s2\pi}}{s}$$

$$\Leftarrow\ (s^2+4)Y(s)=\frac{e^{-s\pi}}{s}-\frac{e^{-s2\pi}}{s}+s\ \Leftarrow\ s^2Y(s)-s+4Y(s)=\frac{e^{-s\pi}}{s}-\frac{e^{-s2\pi}}{s}$$

$$Y(s)=\frac{e^{-s\pi}}{s(s^2+4)}-\frac{e^{-s2\pi}}{s(s^2+4)}+\frac{s}{(s^2+4)}$$

$\Leftarrow\ L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+4)}\right]=\cos 2t$, נסמן $F(s)=\frac{1}{s(s^2+4)}$, לכן:

$$L^{-1}\left[\frac{e^{-2\pi s}}{s(s^2+4)}\right]=L^{-1}\left[e^{-2\pi s}F(s)\right],\ L^{-1}\left[\frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+4)}\right]=L^{-1}\left[e^{-\pi s}F(s)\right]$$

$$F(s)=\frac{1}{s(s^2+4)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+4}=\frac{A(s^2+4)+(Bs+C)s}{s(s^2+4)}$$

$$A(s^2+4)+(Bs+C)s=1$$

$$\begin{array}{c|ccccc} s=0 & 4A=1 & \Rightarrow & A=1/4 & & A=1/4 \\ s^2 & A+B=0 & \Rightarrow & B=-1/4 & \Rightarrow & B=-1/4 \\ s & C=0 & \Rightarrow & C=0 & & C=0 \end{array}$$

$$f(t)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos 2t=\frac{1}{4}(1-\cos 2t)\Leftarrow F(s)=\frac{1}{s(s^2+4)}=\frac{1}{4s}-\frac{1}{4}\frac{s}{s^2+4}$$

$$L^{-1}\left[e^{-\pi s}F(s)\right]=u_\pi(t)f(t-\pi)=\frac{1}{4}u_\pi(t)\left(1-\cos 2(t-\pi)\right)=\frac{1}{4}u_\pi(t)\left(1-\cos 2t\right)$$

$$\Leftarrow L^{-1}\left[e^{-2\pi s}F(s)\right]=u_{2\pi}(t)\,f(t-2\pi)=\frac{1}{4}u_{2\pi}(t)\left(1-\cos 2t\right)$$

$$y(t)=\cos 2t+\frac{1}{4}\left(u_{\pi}(t)-u_{2\pi}(t)\right)\left(1-\cos 2t\right)$$

ולפי משפט קונוולוציה: $F(s)=\frac{1}{s(s^2+4)}=\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2+4}$ או $L\left[(\mathrm{u}*v)(t)\right]=U(s)V(s)$

$$L^{-1}\left[\mathrm{F}(s)\right]=L^{-1}\left[U(s)V(s)\right]=(\mathrm{u}*v)(t)=\int_0^t \mathrm{u}(\tau)v(t-\tau)d\tau$$

$$U(s)=\frac{1}{s^2+4}=\frac{1}{2}\frac{2}{s^2+4},V(s)=\frac{1}{s}\ ,L^{-1}\left[U(s)\right]=\frac{1}{2}\sin 2t\ ,L^{-1}\left[V(s)\right]=1.$$

$$L^{-1}\left[\mathrm{F}(s)\right]=L^{-1}\left[U(s)V(s)\right]=\int_0^t \frac{1}{2}\sin 2\tau d\tau=-\frac{1}{4}\cos 2\tau\Big|_0^t=\frac{1}{4}\left(1-\cos 2t\right)$$